

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 3.

Выполнимые и общезначимые
формулы.

Модели. Логическое следование.

Проблема общезначимости.

Семантические таблицы.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой в интерпретации** I , если **существует** такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **истинной в интерпретации** I , если **для любого** набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой**, если есть интерпретация I , в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **общезначимой** (или **тождественно истинной**), если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **противоречивой** (или **невыполнимой**), если она не является выполнимой.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

$P(x_1) \& \neg P(x_2),$
 $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x),$
 $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ — выполнимые формулы.

$I_1 : D_I = \{d_1, d_2\}, \bar{P}(d_1) = \text{true}, \bar{P}(d_2) = \text{false}$

$I_1 \models P(x_1) \& \neg P(x_2)[d_1, d_2], \quad I_1 \models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x).$

$I_2 : D_I = \{d\}, \bar{P}(d) = \text{true}$

$I_2 \models \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Формулы $P(x_1) \& \neg P(x_2), \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ необщезначимые.

$I_2 \not\models P(x_1) \& \neg P(x_2)[d, d], \quad I_1 \not\models \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x).$

Формула $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ является общезначимой.

Но почему? И как в этом убедиться?

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Выполнимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний. Каждая выполняемая формула несет определенную информацию.

Общезначимые формулы — это трюизмы, банальности, тавтологии, не несущие никакой информации.

Какую же роль играют общезначимые формулы?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I , в которой выполняются все формулы множества Γ , называется моделью для множества Γ .

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ .

Пример

$I : D_I = \{d_1, d_2\}, \bar{P}(d_1) = \text{true}, \bar{P}(d_2) = \text{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

Замечание

А какая интерпретация является моделью пустого множества формул $\Gamma = \emptyset$?

Правильный ответ: любая интерпретация . Почему ?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — « x — квадрат»;

$S(x)$ — « x — шар»;

$B(x)$ — « x — черный предмет»;

$W(x)$ — « x — белый предмет»;

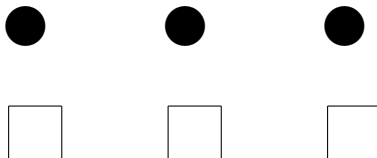
$U(x, y)$ — «предмет x лежит под предметом y ».

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x (W(x) \& C(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& S(y) \& U(x,y)))$$

Модель /



~~$$\forall x (W(x) \& C(x) \& \exists y (B(y) \& S(y) \& U(x,y)))$$~~

Каждый предмет является белым кубом
и лежит под каким-то черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

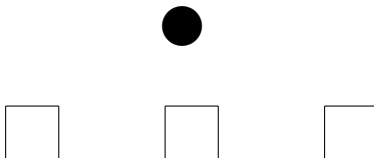
$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Модель /



МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Модель /



$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \rightarrow \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Модель /



$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \rightarrow \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$



Модель J

~~$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \rightarrow \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$~~

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Общий принцип правильного построения формул.

Каждый предмет, наделенный атрибутом A , обладает свойством B :

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

Некоторый предмет, наделенный атрибутом A , обладает свойством B :

$$\exists x (A(x) \& B(x))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определение

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется **логическим следствием** множества предложений (базы знаний) Γ , если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ , т. е.

$$\text{для любой интерпретации } I: \quad I \models \Gamma \implies I \models \varphi$$

Логические следствия — это «производные» знания, которые неизбежно сопутствуют «базовым» знаниям Γ , находятся в причинно-следственной зависимости от предложений Γ . Одна из главных задач (и одновременно наиболее характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это извлечение логических следствий из баз знаний.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

А какие формулы являются логическими следствиями пустой базы знаний $\Gamma = \emptyset$? Правильный ответ: общезначимые.

Поэтому для обозначения общезначимости формулы φ будем использовать запись $\models \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. Тогда

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Если $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$, т. е. I — модель для Γ .

Поскольку $\Gamma \models \varphi$, получаем $I \models \varphi$. Значит,
 $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Таким образом, для любой интерпретации I имеет место
 $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Значит, $\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$ — общезначимая формула.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. Тогда

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ , т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$.

Так как $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$, верно $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Значит, $I \models \varphi$.

Так как I — произвольная модель для Γ , приходим к заключению $\Gamma \models \varphi$.



ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

Практически важно уметь определять эти каналы и настраивать их на извлечение нужных знаний.

- ▶ База знаний — множество предложений Γ ;
- ▶ Запрос к базе знаний — предложение φ ;
- ▶ Получение ответа на запрос — проверка логического следствия $\Gamma \models \varphi$.

Если Γ — конечное множество, то проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости формулы

$$\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Таким образом, возникает проблема
общезначимости формул:

Для заданной формулы φ
проверить ее общезначимость:

$$\models \varphi?$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Утверждение.

Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ верно, что

$$1. \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n);$$

2.

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнимая} \\ \iff & \\ & \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнимая;} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнима в любой интерпретации} \\ \iff & \\ & \models \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Доказательство

Самостоятельно. Это просто.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Как же решать проблему
общезначимости

$\models \varphi$?

Может быть проверять все
интерпретации по очереди ?

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Нет, такой подход заведомо обречен на неудачу. Почему?
Потому, что верно

Утверждение.

Существует такая замкнутая формула φ , которая **истинна** в любой интерпретации / с конечной предметной областью D_I , но **не является общезначимой**.

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y).$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект y — начальник субъекта x »;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

2). $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))$: «начальник моего начальника — мой начальник»;

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$: «кто-то никому не подчиняется».

В каждой компании с конечным множеством сотрудников, в которой действуют законы 1) и 2), выполняется и закон 3).

Значит, наша формула истинна во всех интерпретациях с конечной предметной областью.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

$R(x, y)$: «натуральное число y больше натурального числа x »

1). $\forall x \neg R(x, x)$;

2). $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))$;

выполняются на множестве натуральных чисел.

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$ на множестве натуральных чисел не выполняется: неверно, что существует максимальное натуральное число.



ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Не только перебор всех интерпретаций, но даже проверку истинности формулы в интерпретации с бесконечной предметной областью осуществить затруднительно.

Значит, необходимо придумать более изощренный способ проверки.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$| I \not\models \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \quad \left| \quad \begin{array}{l} I \not\models \varphi \\ I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x) \end{array} \right.$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) & I \not\models \varphi \\ I \models \forall x P(x) & I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x) \\ & I \not\models \forall x R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) & I \not\models \varphi \\ I \models \forall x P(x) & I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x) \\ & I \not\models \forall x R(x) \\ & I \not\models R(x)[d] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

Значит, $\models \varphi$.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$| I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x))$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$I \models \exists x (P(x)) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \not\models \forall x P(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$\begin{array}{l|l} I \models \exists x (P(x)) & I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \models P(x)[d_1] & I \not\models \forall x P(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$\begin{array}{l|l} I \models \exists x (P(x)) & I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \models P(x)[d_1] & I \not\models \forall x P(x) \\ & I \not\models P(x)[d_2] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$\begin{array}{l|l} I \models \exists x (P(x)) & I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \models P(x)[d_1] & I \not\models \forall x P(x) \\ & I \not\models P(x)[d_2] \end{array}$$

Противоречия нет.

$I = \langle D_I, \overline{Pred} \rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$,
 $I \not\models \varphi$.

Следовательно, $\not\models \varphi$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

- ▶ Общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель.
- ▶ Контрмодель строим, указывая, какие формулы должны в ней выполняться, а какие нет. Требования (не)выполнимости формул, предъявляемые к контрмодели, сводим в таблицу и последовательно их уточняем.
- ▶ Если требования, которые предъявляются к контрмодели, оказываются несовместными, значит, проверяемая формула неопровержима, т. е. общезначима.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ .

Семантическая таблица $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$ называется **выполнимой**, если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \dots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

- ▶ $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы φ , $\varphi \in \Gamma$,
- ▶ $I \not\models \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы ψ , $\psi \in \Delta$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Примеры

Семантическая таблица

$$T = \langle \{ \exists x P(x), \neg P(y) \} ; \{ \forall x P(x), P(x) \& \neg P(x) \} \rangle$$

выполнима. Ее выполнимость подтверждает интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Pred} \rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $P(d_1) = \text{true}$, $P(d_2) = \text{false}$, и набор d_1, d_2 значений свободных переменных x, y .

Семантическая таблица

$$T = \langle \emptyset ; \{ \exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y) \} \rangle$$

невыполнима. Почему?

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Теорема (о табличной проверке общезначимости)

$\models \varphi \iff$ таблица $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ невыполнима.

Доказательство. $\models \varphi \iff$ для любой интерпретации I и для любого набора $d_1, \dots, d_n \in D_I$ значений свободных переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n] \iff$ таблица $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ невыполнима ни в одной интерпретации.



СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется **закрытой**.

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. **Самостоятельно.**

Семантическая таблица $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из атомарных формул, называется **атомарной**.

Утверждение

Незакрытая атомарная таблица выполнима.

Доказательство. **Самостоятельно.**

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ к закрытым таблицам.

Доказательства такого вида называются **логическим выводом**. Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется **табличным**.

Чтобы табличный вывод был корректным, правила преобразования таблиц (**правила табличного вывода**) должны сохранять выполнимость семантических таблиц.

Поэтому начнем с разработки правил табличного вывода и проверки их корректности.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 3.